

DE LO LINEAL A LO EXPONENCIAL

Patricia Sureda

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT)
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Tandil, Argentina.
psureda@exa.unicen.edu.ar

Resumen

Dado que las dificultades que presenta la conceptualización de lo no-lineal, y en particular el estudio de las *funciones exponenciales*, ya habían sido advertidas por los profesores durante el proceso de enseñanza, y documentadas por algunas investigaciones, en mi trabajo de tesis doctoral realizado bajo la dirección de la Dra. María Rita Otero, nos dedicamos a estudiar la conceptualización de cuatro grupos de alumnos del colegio secundario [15-16 años], cuando estudiaban el campo conceptual de las *funciones exponenciales* en una dinámica de estudio que priorizó la participación del alumno en la construcción del conocimiento.

El análisis de los protocolos, que realizamos a partir de los constructos teóricos propuestos por la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud (1990, 1996, 2005, 2007, 2008, 2010), nos permite por una parte, mostrar la estrecha relación entre la conceptualización, los sistemas de representación y los invariantes operatorios de los estudiantes; y por otra parte, reconocer a grandes rasgos, un proceso de conceptualización de la *función exponencial*, que comienza en las respuestas totalmente lineales y se va modificando progresivamente en una dirección primero no lineal, y finalmente exponencial.

Aunque esta conceptualización no va más allá del nivel que Vergnaud denomina explicitable, es necesario advertir que la función exponencial es un concepto complejo, y que como toda conceptualización es una tarea de largo aliento que va más allá del tiempo que demandó su estudio en el colegio secundario.

Introducción

En un principio, las *razones de ser* de la *función exponencial* estaban fuertemente vinculadas al desarrollo y estudio de las tablas logarítmicas, pero con el desarrollo del cálculo infinitesimal se transformaron en potentes herramientas teóricas para la modelización de fenómenos relativos a la economía, la biología, la meteorología, el medio ambiente, etc. Finalmente, cuando el uso de la tecnología hizo innecesario el uso de las tablas logarítmicas, las *funciones exponenciales* y *logarítmicas* ya ocupaban un espacio relevante en muchas áreas de la matemática. Sin embargo, en la escuela secundaria, cuando la utilización escolar de las calculadoras científicas en las aulas, le quitó sentido a la enseñanza de las tablas logarítmicas, los profesores las dejaron de enseñar. Así, parecería que hay un período de tiempo en la década de los noventa donde la desaparición de las tablas logarítmicas afectó la enseñanza de las *funciones exponenciales* y *logarítmicas* en la escuela secundaria, aun cuando éstas nunca fueron quitadas del curriculum.

Más tarde, en las últimas reformas educativas (1994; 2010) advertimos un intento, al menos desde el curriculum, por recuperar el *sentido* de la enseñanza de las *funciones exponenciales* y logarítmicas en la escuela secundaria, primero a partir de un marcado

énfasis funcional, y luego mediante su uso como modelos matemáticos. Este último abordaje presentó, y sigue presentando, dificultades de implementación que necesitan ser analizadas.

Por ejemplo, la comprensión de modelos como el del crecimiento de la cantidad de dinero puesto a interés compuesto, el crecimiento de la deuda que genera el interés de una tarjeta de crédito; el avance de la epidemias en una población, como fue el caso de la pandemia del virus de la gripe A (H1N1) y del brote de cólera en Haití; o la durabilidad de los efectos de la radiación en el medio ambiente, producida en Japón por las roturas en los generadores nucleares con el reciente sismo; etc., requieren de esquemas exponenciales. Como consecuencia, la comprensión de estos acontecimientos se obstaculiza si solo se dispone de esquemas mentales lineales, pues se asimilan los modelos no lineales a los lineales (De Bock, Van Doorem y Verschoffel, 2010; De Bock, Van Dooren; Janssens y Verschaffel, 2002; De Bock, Verschaffel y Janssens, 2002; De Bock, Verschaffel y Janssens, 1998; Confrey, 1994; Karrer y Magina, 2000; Villarreal, Esteley, y Alagia, 2005; Sessa y Vilotta, 2008; Ramírez, Chavarría, Borbón, y Alpizar, 2010).

Los esquemas mentales lineales de las personas son el producto de un largo proceso de construcción que se inicia con su propia participación en situaciones cotidianas que requieren, en su gran mayoría, ser modeladas mediante variaciones lineales. Mientras que los esquemas no lineales, y en particular los exponenciales, son más complejos pues se apoyan parcialmente en las estructuras aditivas y multiplicativas. Pero dado que la escasa participación de las personas en este tipo de situaciones no colabora con su construcción, en el trabajo de tesis doctoral nos interesamos en analizar el proceso de conceptualización de los estudiantes de la escuela secundaria cuando estudian las funciones exponenciales por medio de situaciones problemáticas vinculadas a la capitalización de dinero puesto a interés compuesto en un plazo fijo.

El análisis de cómo se capitaliza el dinero puesto a interés compuesto, o de cómo crecen los intereses de la tarjeta, resultan problemas que no sólo son socialmente relevantes, sino que además, resultan difíciles de conceptualizar para aquellos sujetos que solo disponen de esquemas lineales. Así, el abordaje de la *función exponencial* a partir de un problema de interés compuesto, no sólo permite que el alumno estudie la función exponencial con *sentido*, sino que además proporciona un contexto, que al poder ser abordado desde diferentes sistemas de representación y de variadas maneras, ofrece una buena cantidad de situaciones para su conceptualización. Conceptualización que estará ligada tanto al diseño de las tareas que compongan cada situación, como a los sistemas de representación que estén involucrados.

Referenciales Teóricos

La tesis integra dos referenciales teóricos, uno didáctico y uno cognitivo para estudiar la enseñanza de la función exponencial con *sentido* en la escuela secundaria, y su conceptualización. La Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1999; 2007; 2009), brinda sustento a las decisiones relativas a la Actividad de Estudio e Investigación (AEI) en los procesos de topogénesis, cronogénesis y mesogénesis; y la Teoría de los Campos Conceptuales (Vergnaud, 1990; 2000; 2007) orienta el análisis de la

conceptualización. Un punto importante, es que en ambas teorías el concepto de situación tiene el carácter de tarea.

Una Actividad de Estudio e Investigación es en principio una organización didáctica que genera un encuentro arreglado de los alumnos X con un cierto saber, y esto con ocasión del estudio de una cuestión Q determinada. En otros términos, la AEI provoca la formación, en el seno de una clase $[X, Y]$, y de un sistema didáctico $S(X; Y; Q)$ la producción de una respuesta R^\forall . En forma esquemática:

$$S(X; Y; Q) \rightarrow R^\forall$$

Luego, como el sistema didáctico $S(X; Y; Q)$ “fabrica” (notado por la flecha \rightarrow) el medio M a partir de recursos ya existentes en sus entornos internos y externos, o a partir de recursos creados en su seno; y de que a partir de este “trabajo” (notado por la flecha \hookrightarrow) en el medio, es que se va a elaborar y a validar R^\forall ; es posible reescribir la expresión de la siguiente manera:

$$[S(X; Y; Q) \rightarrow M \hookrightarrow R^\forall].$$

Así, en la TAD, el sistema didáctico $S(X; Y; Q)$ produce y organiza el medio M con el cuál, dialécticamente, engendra R . Un poco más tarde, Chevallard (2007: 33) explica que una AEI, es estructuralmente idéntica a una reorganización *cuaternaria* del estudio. Pues la AEI llevada a cabo llama en primer lugar a una *síntesis*, la cual se completa mediante un trabajo que consiste en *ejercicios* (en el verdadero sentido del concepto), así como en el estudio de *problemas* que prueba los límites de la organización matemática cuyos materiales técnicos y tecnológicos-teóricos se habrán producido en las AEI (o de una sucesión de AEI) y que la síntesis habrá acabado de hacer emerger, todo ello llama a los *controles* que son los que permitirán una evaluación.

La evaluación tiene un doble objetivo, por una parte la organización del saber construido, y por otra parte la relación de la clase y de cada uno de los alumnos, con esta organización del saber. Así, el diseño de una AEI para la escuela secundaria debe estar compuesta tanto por las situaciones que permiten producir los materiales técnicos y teóricos de la organización matemática estudiada, en este caso las funciones exponenciales, como por las síntesis, los ejercicios y la evaluación.

La Teoría de los Campos Conceptuales (TCC) propuesta por Vergnaud (1990, 1994, 1996, 1998, 2007a, 2007b, 2008, 2010) nos permite estudiar la conceptualización, entendida como piedra angular del desarrollo cognitivo. La conceptualización involucra una relación dialéctica entre las situaciones y los conceptos: las situaciones dan sentido a los conceptos y un mayor desarrollo conceptual del sujeto le permite abordar situaciones más complejas. Para analizar la conceptualización, que es a partir de los esquemas, es inevitable analizar la actividad, de la cual la conducta observable es una parte muy pequeña. Pero aunque el esquema no es una conducta, tiene la función de generar la actividad y la conducta en situación, y por eso es posible analizar la conceptualización de las funciones exponenciales, a partir del análisis de las conductas observables, en particular, de las resoluciones escritas de los alumnos cuando resuelven un problema. Por esta razón, es posible estudiar mediante

el análisis de las conductas, los esquemas que dirigen las respuestas de los alumnos en situación, y en particular los invariantes operatorios [IO] que hacen operatorio el esquema.

Por otra parte, esta teoría postula que si estamos interesados en la enseñanza de conceptos, no debemos reducirlos a sus definiciones, pues es través de las *situaciones* y de los problemas que se pretenden resolver como un *concepto* adquiere sentido para el sujeto (Vergnaud, 1990: 133). Así, la TCC define al *concepto* como un triplete de tres conjuntos: C (S; I.O; S.R):

- La referencia [S]: Es el conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto. Para Vergnaud, una situación tiene el carácter de tarea.
- El significado [IO]: Es el conjunto de *invariantes operatorios (conceptos en acto y teoremas en acto)* sobre los cuales reposa la operacionalidad de los *esquemas*. Los conceptos en acto son categorías pertinentes, y los teoremas en acto son proposiciones tenidas como verdaderas. Los conceptos y teoremas se construyen en forma solidaria y pueden ser implícitos o explícitos; más o menos formales; y correctos o incorrectos. Su carácter de IO descansa en que hacen operatorio el esquema.
- El significante [SR]: Son los sistemas de representación. Es decir, el conjunto de las formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el *concepto*, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento.

El carácter pragmático de la construcción del concepto *función exponencial*, no permite reducir el *significado*, ni a los *significantes*, ni a las *situaciones*, pues el *significado* viene dado por ambos (Vergnaud, 1990). Por lo tanto, para estudiar el desarrollo de los *conceptos* relativos a las *funciones exponenciales*, es necesario considerar estos tres conjuntos a la vez.

Aspectos Metodológicos

Para estudiar el *campo conceptual* de las *funciones exponenciales* en la escuela secundaria diseñamos una AEI compuesta por diez situaciones de enseñanza, dos situaciones de síntesis, tres conjuntos de tareas y una evaluación. Por otra parte, y debido a que la conceptualización de un concepto está ligada tanto al diseño de las tareas que componen cada situación, como a los sistemas de representación, cada situación fue diseñada teniendo en cuenta cinco sistemas de representación [SR]: el SR Numérico [SRN] que refiere tanto a las tablas como a los cálculos con números; el SR Algebraico de Primer Orden [SRA1] que involucra aquellos procedimientos algebraicos en el que los parámetros se corresponden con la situación. SR Algebraico de Segundo Orden [SRA2] que refiere únicamente a las fórmulas que representan una familia de funciones; el Analítico-Gráfico [SRG] que refiere a la construcción gráfica en ejes cartesianos; y el Verbal Escrito [SRVE] que son las formas lingüísticas escritas.

Luego de una prueba piloto, que realizamos en un cuarto año de la escuela secundaria, readaptamos e implementamos el conjunto de situaciones en dos cursos de cuarto año (15-16 años). Luego analizamos los protocolos, y a partir de él tomamos decisiones sobre el ajuste de la propuesta de enseñanza, que debido al nuevo diseño curricular fue necesario considerar también la reubicación de los contenidos en quinto año, e implementarlo en dos

cursos de quinto año (16-17 años). En total obtuvimos la resolución de 121 alumnos clase a clase, lo que hace un total de 1440 resoluciones. Esta recolección sistemática de los protocolos era indispensable, debido a que para el estudio de la conceptualización necesitábamos acceder a las primeras estrategias formuladas por los estudiantes. Cada intervención la registrábamos mediante un audio general. La implementación nos demandó dos meses y medio de clases, en una escuela de la ciudad que atiende a sectores urbanos medios. Allí llevamos a cabo el estudio piloto y las cuatro implementaciones.

El análisis de los 1440 protocolos nos ha permitido describir el proceso de conceptualización en cinco etapas (Sureda y Otero, 2013) según se muestra en la tabla 1.

Etapas	Indicador
Lineal	Respuesta Lineal en todos los sistemas de representación.
Parcialmente No Lineal	Respuesta No Lineal en por lo menos un sistema de representación.
No Lineal	Respuesta No Lineal en todos los sistemas de representación.
Parcialmente Exponencial	Respuesta Exponencial en por lo menos un sistema de representación.
Exponencial	Respuesta Exponencial en todos los sistemas de representación.

Tabla 1

La implementación realizada luego en quinto año mostró que el proceso de conceptualización de la función exponencial se desarrolló por las cinco etapas mencionadas. Al finalizar, se les dio a los alumnos un cuestionario para ser contestado en forma individual y anónima, cuyo formato fue tomado de Fanaro (2009). El último ítem era de respuesta abierta para que ellos expresaran su opinión acerca de las clases de matemática. De los 31 alumnos de Ciencias Naturales contestaron la encuesta 29, y de los 28 alumnos de Economía respondieron la encuesta 26. Esta encuesta permitió tener en cuenta la perspectiva de los alumnos al momento de analizar la gestión de la clase.

La Gestión en el Aula

Para poder llevar a cabo la AEI era necesario gestionar lo que Chevallard denomina la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo en la clase de Matemática. En esta pedagogía, el lugar del profesor y del alumno en la clase, requieren ser radicalmente modificados. Así, el lugar del alumno, antes reducido a la aplicación de técnicas previamente enseñadas, requiere modificarse en una dirección que exige tomar decisiones, asumir la responsabilidad del propio aprendizaje, pensar con otros, etc.

La modificación de la topogenesis, por ser una construcción didáctica, y cognitiva-afectiva que comprende nuevas responsabilidades para cada integrante del grupo de clase, requirió de un esfuerzo sostenido en el tiempo. Un dispositivo funcional al desarrollo de una clase de matemática con estas características, se materializó en un Acta de Compromiso y Estudio en Matemática (Otero, 2007) que atendía a las cuestiones afectivas, y mediante la cual se consensuaron las nuevas responsabilidades. Este consenso resulta esencial para que el alumno sea tomado en cuenta. Pero la nueva forma de gestionar el estudio molestó al principio a los alumnos, pues ellos no lograban lidiar con la incertidumbre y la ansiedad

que les ocasionaba resolver los problemas sin conocer las respuestas. A continuación se presentan dos de las opiniones que formularon los alumnos (figura 1 y figura 2):

2- Expresá tu opinión libremente acerca de lo vivido en estas clases de Matemática.

Al comienzo del año me pareció muy divertida la manera de enseñar: se exigía mucho y no se explicaba tanto. Pero después, cuando ~~estamos de~~ ^{se} empezamos con funciones, llegué a las conclusiones con mucho esfuerzo. Mucha y se volvió mucho más interesante. Entendí como los ~~conclusiones~~ las sacaban nosotros mismos en lugar de copiarlas de otro. Me gustó mucho más este método que el común.

Figura 1

2- Expresá tu opinión libremente acerca de lo vivido en estas clases de Matemática.

En estas clases aprendí que cuando había muchas veces que no entendía y le preguntaba a mis compañeros de grupo, lo de hacer grupos también me gusta, está bueno para relacionarse con las personas que no te llevabas. Con respecto a la profesora, daba bien las clases pero lo que no estuvo muy de acuerdo era en que no explicaba mucho, pero entiendo que es para que nosotros saquemos conclusiones por nuestra cuenta. De todo estuvieron buenas las clases de matemática, fueron distintas a las demás clases.

Figura 2

La primera respuesta caracteriza como muy chocante esta forma de enseñar y remarca el esfuerzo que implicaba hacerse cargo de su propio aprendizaje, al no contar con la explicación del profesor. Sin embargo sobre el final afirma que prefiere esta forma de estudio y no la tradicional. El segundo alumno hace referencia a la importancia de los grupos en la resolución de las situaciones, ya que cuando no entendía les podía preguntar a ellos. Con respecto a la falta de explicación por parte de la profesora comienza quejándose, pero sobre el final reconoce que ésta lo hacía por su propio bien y que las clases estuvieron buenas. Eran diferentes. Estos protocolos nos permiten advertir lo difícil que les resultó a los alumnos el cambio, a la vez que nos permite destacar que a pesar de las dificultades, lo prefieren.

Así, sobre el final la mayor parte de los alumnos aceptaron el desafío, y mejoraron su desempeño. Al terminar la AEI, casi la totalidad de los alumnos manifestó la importancia de permitirles pensar por sí mismos y equivocarse.

Algunos resultados del Análisis de la Conceptualización

Las etapas que se distinguieron en el análisis de la conceptualización son cinco según se describen a continuación. En las etapas: lineal, no lineal y exponencial; se muestran los teoremas en acto característicos a la etapa en cada SR. En las etapas parcialmente no lineal y parcialmente exponencial, no se muestran tablas pues los teoremas en acto, serán alguno de los ya descriptos en las otras etapas. Los teoremas en acto son una reconstrucción del investigador a partir del análisis de las respuestas de los alumnos. Esto implica que son una etiqueta. Como tal los teoremas en acto de los alumnos, que muchas veces son implícitos e

inconscientes, no son necesariamente literalmente igual al teorema enunciado. Pero sin duda, lo son en el significado.

Lineal: Son aquellas producciones que son lineales en todos los SR. Los teoremas en acto lineales para cada SR son los que se muestran en la tabla 2:

SRN	“La variable dependiente aumenta o disminuye lo mismo cada vez”
SRA1	“La expresión algebraica es $f(x) = mx + b$ Donde x es la variable independiente; m es la pendiente y b la ordenada al origen”
SRG	“La representación gráfica es una curva recta creciente o decreciente”
SRVE	“Una función es lineal porque la gráfica es una recta”

Tabla 2

Este tipo de resolución evidencia un sistema de esquemas lineales complejo y completo que se expresa en todos los sistemas de representación. Aunque los teoremas en acto utilizados en los distintos SR se centran en diferentes aspectos de la linealidad, la tabla evidencia que son coherentes entre sí.

Parcialmente No Lineal: La respuesta es parcialmente no lineal cuando la resolución es *no lineal* en al menos un SR, y lineal en el resto. En la figura 3 se muestra como ejemplo de esta etapa, la resolución de un alumno a la primera situación.

Situación 1: Un grupo de chicos tiene \$12000 para su viaje de egresados y los quieren poner en un plazo fijo a interés compuesto por 30 meses, que es el momento de viajar. Se averiguaron las tasas de algunos bancos y se sabe que:

La tasa mensual del Banco 1 es de 0,011 y les permite tener \$12132 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del Banco 2 es de 0,012 y les permite tener \$12144 cumplido el primer mes.

La tasa mensual del Banco 3 es de 0,013 y les permite tener \$12156 cumplido el primer mes.

- ¿Cómo calcularon los bancos ese primer mes?
- Realiza un gráfico aproximado de la variación del dinero en cada banco; calculando al menos tres valores.
- ¿A qué función corresponde la representación gráfica que dibujaste?

Ⓐ BANCO 1: $f(x) = 12000 + 12000 \cdot 0,011$

$12132 = 12000 + 12000 \cdot 0,011$

BANCO 2: $12144 = 12000 + 12000 \cdot 0,012$

BANCO 3: $12156 = 12000 + 12000 \cdot 0,013$

SRN: No Lineal

Ⓑ BANCO 1: 2^{do} mes: $12132 + 12132 \cdot 0,011 = 12265,45$

3^{er} mes: $12265,45 + 12265,45 \cdot 0,011 = 12400,37$

BANCO 2: 2^{do} mes: $12144 + 12144 \cdot 0,012 = 12289,73$

3^{er} mes: $12289,73 + 12289,73 \cdot 0,012 = 12437,3$

BANCO 3: 2^{do} mes: $12156 + 12156 \cdot 0,013 = 12344$

3^{er} mes: $12344 + 12344 \cdot 0,013 = 12474$

SRVE: Lineal

* Corresponde a una función lineal?

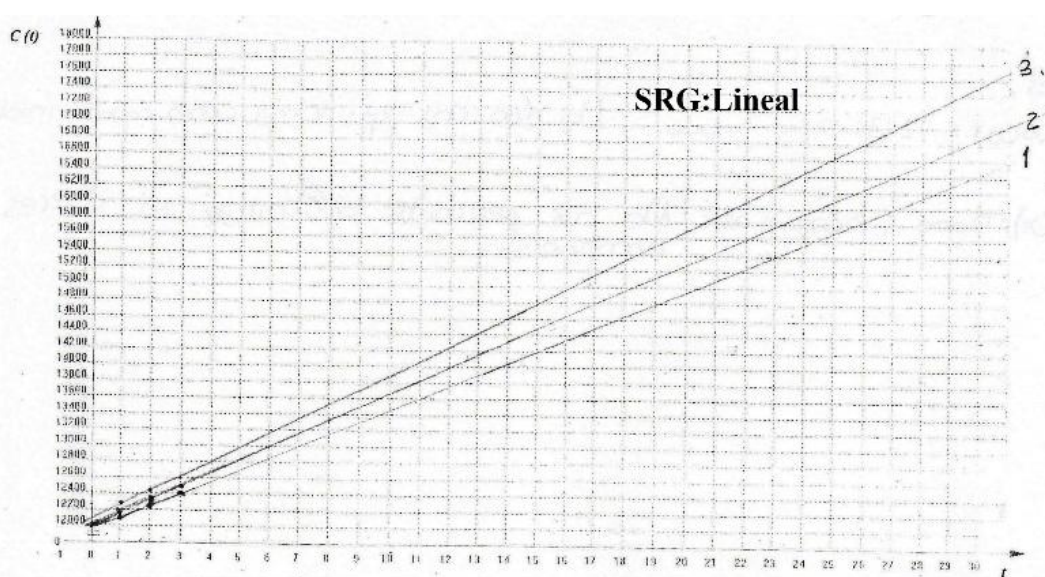


Figura 3

En general los alumnos respondieron en forma no lineal en el SRN y linealmente en los demás. Ellos calcularon recursivamente el interés simple, de la siguiente manera. Banco 1 - Mes 1: $12000 \cdot 0,011 + 12000 = 12132$. Mes 2: $12132 \cdot 0,011 + 12132 = 12265,452$. Esta acción, germen de una acción exponencial, les permite obtener la capitalización compuesta. Para mostrar cómo varía la cantidad de dinero puesto a interés, dibujan tres rectas y luego afirman que graficaron una función lineal (Figura 3).

Las repuestas dadas en los diferentes sistemas de representación son diferentes y contradictorias entre sí.

No lineal: La respuesta es no lineal, cuando es no lineal en todos los SR pero todavía no es exponencial. Por ejemplo en el sistema de representación gráfico [SRG] la respuesta no es una recta, pero tampoco es una curva estrictamente creciente.

Los teoremas en acto *no lineales* para cada SR son los que se muestran en la tabla 3:

SRN	“El aumento se calcula sobre la cantidad inmediata anterior”
SRA1	“La fórmula es $f(x) = x + (1,1\% \cdot x)$. Donde x es el Monto Anterior”
SRG	“La representación gráfica no es una recta”
SRVE	“Si el aumento varía cada vez, no es una función lineal”

Tabla 3

En esta etapa se advierte un cierto grado de explicitación, pues aun cuando los alumnos no logran la variación exponencial, ellos se dan cuenta de que la variación no es lineal.

Parcialmente Exponencial: Son parcialmente exponencial aquellas respuestas que son exponenciales en al menos un sistema de representación, pero no exponenciales en el resto.

En las figuras 4, 5 y 6 se muestra como ejemplo de esta etapa, la resolución de un alumno a la segunda situación.

En la situación dos se propone la tasa de interés de los tres bancos, el dinero obtenido luego del primer mes de capitalización, y una tabla que muestra la variación de la cantidad de dinero en el primer banco, para los primeros treinta meses. La tabla pone en evidencia que la cantidad de dinero no aumenta lo mismo cada mes, y tiene algunos casilleros vacíos que los alumnos deben completar.

En la primera tarea el alumno debe completar los casilleros vacíos y proponer una fórmula. En la segunda tarea tiene que construir tablas similares para los otros dos bancos, y dar las fórmulas. En la tercera determinar dominio e imagen para que sean funciones. Luego, graficarlas en un sistema de ejes cartesianos dado y explicar la diferencia entre este modelo y el anterior.

En la figura 4 se muestra cómo este alumno calcula y completa los casilleros usando un procedimiento no lineal.

Mes (t)	Monto final del periodo C (t)	Monto al inicio del periodo C (t - 1)	Interés en cada periodo I ((t-1); t)	Tasa i = R/100
0	C(0) = 12000	--	--	--
1	C(1) = 12132	C(0) = 12000	I (0; 1) = 132	0,011
2	C(2) = 12265,452	C(1) = 12132	I (1; 2) = 133,452	0,011
3	C(3) = 12400,37197	C(2) = 12265,452	I (2; 3) = 134,919972	0,011
4	C(4) = 12536,77606	C(3) = 12400,37197	I (3; 4) = 136,4040917	0,011
5	C(5) = 12674,6806	C(4) = 12536,77606	I (4; 5) = 137,9045367	0,011
6	C(6) = 12814,10209	C(5) = 12674,6806	I (5; 6) = 139,4214866	0,011
7	C(7) = 12955,05721	C(6) = 12814,10209	I (6; 7) = 140,955123	0,011
8	C(8) = 13097,56284	C(7) = 12955,05721	I (7; 8) = 142,5056293	0,011
9	C(9) = 13241,63603	C(8) = 13097,56284	I (8; 9) = 144,0731912	0,011
10	C(10) = 13387,29403	C(9) = 13241,63603	I (9; 10) = 145,6579963	0,011
11	C(11) = 13534,5426	C(10) = 13387,29403		
12	C(12) = 13683,43136	C(11) = 13534,5426		
13	C(13) = 13833,95214	C(12) = 13683,43136		
14	C(14) = 13986,12561	C(13) = 13833,95214		

Figura 4

En la figura 5 se muestra que este alumno escribe la expresión algebraica $Mf = M_i (1 + i)t$, a la vez que afirma “si a cada monto lo multiplicamos por 1,011 obtenemos el próximo resultado”. Esto muestra que la deducción de la fórmula fue generada a partir de la tabla.

$M_F = M_i \cdot (1 + i)^t$ → si a C/monto multiplicamos por 1,011 obtenemos el próximo resultado.

$M_F =$ MONTO FINAL

$M_i = 12000$

$i = 0,011$

$t =$ MES.

SRA1: Exponencial

Figura 5

Luego en el SR gráfico, dibuja tres rectas (Figura 6). Así, este alumno resolvió en forma no lineal en el SRN, exponencialmente en el SRA1 y linealmente en el SRG.

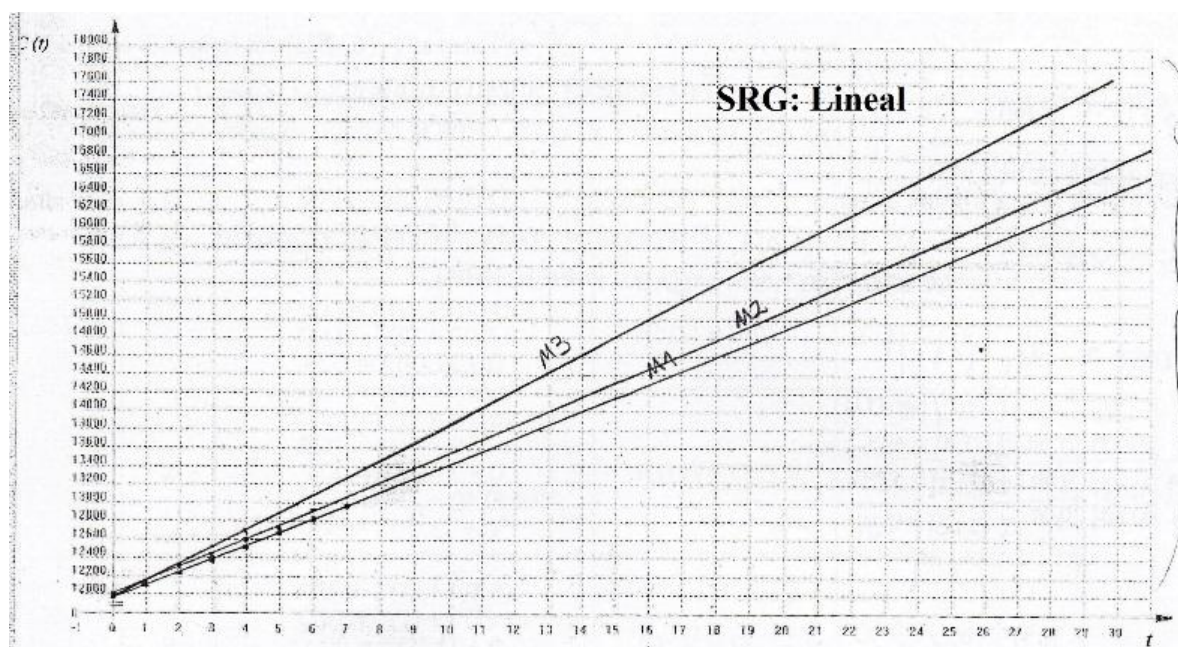


Figura 6

En esta etapa los teoremas en acto que dirigen la acción en los diferentes SR son contradictorios entre sí. Pero los alumnos no lo advierten. Así, el análisis muestra que en un principio las ideas exponenciales y no exponenciales coexisten. Por otra parte, muestra que comprender un problema en un sistema de representación y poder resolverlo, no implica su comprensión en otro, al menos cuando el conocimiento del campo conceptual es incipiente.

Exponencial: Las respuestas son exponenciales, cuando son explícitamente exponenciales en todos los sistemas de representación. En esta etapa los alumnos logran diferenciar una función exponencial de una que no lo es, en los cuatro sistemas de representación [SRN, SRA1, SRG y SRVE].

Los teoremas en acto *exponenciales* para cada SR son los que se muestran en la tabla 4:

SRN	"El aumento se calcula sobre la cantidad inmediata anterior"
SRA1	"La expresión algebraica es: $f(t) = k \cdot a^t + b$. Donde t es la variable independiente; a es la tasa de crecimiento; k la cantidad inicial y b la asíntota horizontal"
SRG	"La representación gráfica de la variación es una curva estrictamente creciente o decreciente, que posee una asíntota horizontal"
SRVE	"Una función es exponencial porque la variable independiente está en el exponente"

Tabla 4

El análisis de los protocolos muestra que la conceptualización de la función exponencial, es una tarea compleja que no se realiza en todos los sistemas de representación a la vez, y que demanda mucho más que los dos meses y medio que demandó la implementación, sobre todo si se quiere llegar a que los alumnos dominen el nivel que Vergnaud llama de formalización, en el proceso de explicitación de los invariantes operatorios (Vergnaud, 2007b:299).

Conclusiones

La base empírica, permite sostener la existencia de una progresividad en la conceptualización de la función exponencial, que va desde los esquemas totalmente lineales, hasta los totalmente exponenciales. No es posible afirmar si el proceso de conceptualización particular de cada alumno, transita necesariamente por cada una de las etapas.

Si se ha encontrado que las situaciones que han sido dominadas con anterioridad tienen un peso fundamental en los progresos, retrocesos y recuperaciones del conocimiento que se producen durante dicho proceso. Por ejemplo, en el proceso de conceptualización de los alumnos de quinto año, que ya habían estudiado funciones no lineales, no se observan respuestas vinculadas a la etapa totalmente lineal.

A su vez, la descripción muestra que entre la primera y última etapa, las respuestas de los estudiantes en la misma situación, y dependiendo del sistema de representación, están guiadas por invariantes operatorios diferentes. Es decir, esquemas diferentes, a veces lineales, a veces exponenciales. Esto muestra que cuando el conocimiento de un campo conceptual es incipiente, coexisten esquemas contradictorios entre sí para el mismo concepto. Pero, cuando el estudiante sólo estaba en posesión de esquemas lineales, los utiliza coherentemente en todos los sistemas de representación.

Esto ha sido magistralmente tratado en la TCC por Gérard Vergnaud, quien ha formulado una definición del concepto como un triplete en la que los sistemas de representación tienen un papel central, aunque no excluyente. Esto resuelve el problema de la reducción de la matemática a un lenguaje, lo cual es falso, y habitualmente escuchado, a la vez que permite contemplar el papel innegable de los sistemas de representación en matemática y la complejidad que supone el dominio de un campo conceptual en esta área, pues los conceptos aparecen en distintos marcos (geométrico, analítico, funcional, etc.) los cuales, tienen cada uno asociados sus propios sistema de representación.

En consecuencia, no existe “el esquema exponencial” sino una variedad de esquemas exponenciales que son diferentes según el sistema de representación que se esté utilizando. El dominio pleno del campo conceptual de las funciones exponenciales, deberá involucrar en su enseñanza, los diferentes sistemas de representación ligados al concepto. Así, aunque la conceptualización es más que los sistemas de representación, el estudio del concepto de función exponencial en particular y de conceptos matemáticos en general está necesariamente vinculado con ellos.

Finalmente es importante destacar que es posible realizar en las aulas actuales una enseñanza basada en situaciones, un a pesar de las dificultades que conlleva al principio, a profesores y alumnos, adaptarse a una enseñanza en la que cada actor debe tomar lugares tan diferentes a los habituales. Sin embargo vale el esfuerzo, pues, en palabras de Vergnaud (1990: 133) *es a través de las situaciones y de los problemas que se pretenden resolver como un concepto adquiere sentido para el niño.*

Referencias Bibliográficas

- Chevallard (2009). *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD*. [À paraître] http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=164 (consulta 12/ 06/ 2012).
- Chevallard (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. Texte de la conférence plénière donnée à Baeza (España) en octobre 2005, disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134 (consulta 12/ 06/ 2012).
- Chevallard (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2), pp. 221-266.
- Confrey, J. y Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*. 26 (2-3), pp. 31 - 60.
- De Bock, D.; Van Dooren, W.; y Verschaffel, L. (2010). Students' Overuse of Linearity: An Exploration in Physics. *Res Sci Educ*. Springer Science. Business Media B.V.
- De Bock, D.; Van Dooren, W.; Janssens, D. y Verschaffel, L. (2002). The Effects of Different Problem Presentations and Formulations on the Illusion of Linearity in Secondary School Students. *Mathematical Thinking and Learning*. 4(1), pp. 65-89.
- De Bock, D.; Verschaffel, L. y Janssens, D. (2002). Improper use of linear reasoning: an in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics*. 50, pp. 311-334.
- De Bock, D.; Verschaffel, L. y Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school pupils' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics*. 35, pp. 65-83.
- Douady, R. (1986). Juego de Campos y Dialéctica Herramienta-Objeto. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 7, pp. 5-31.
- García, M. Y Llinares, S. (1994). Algunos referentes para analizar tareas matemáticas. *Suma*, 18, pp. 13-23.
- Janvier, C. (1987). Translation processes in mathematics education, en Janvier, C. (eds.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum A.P. Hillsdale, New Jersey. United States.
- Karrer, M., & Magina, S. (2000). Uma sequência de ensino para a introdução do logaritmo: estudo exploratório usando a calculadora. *Boletim de Educação Matemática*. 13 (14), pp. 18-31.
- Ramírez, G., Chavarría, J., Borbón, A. y Alpizar, G. (2010). *Análisis de las conceptualizaciones erróneas en conceptos de ecuaciones exponenciales y logarítmicas: un estudio con estudiantes universitarios de primer ingreso*. Actas del sexto CIEMAC.
- Sessa C., Vilotta D. (2008): "Un espacio para discutir en el aula propiedades y dominio de Validez de la función exponencial". Memorias II REPEM. (pp. 123-134). Santa Rosa, La Pampa, Argentina.
- Sureda P.; Otero M. R.; (2011). *Conceptualización de la función exponencial y sistemas de Representación*. Actas I Congreso Internacional de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (I CIECyM) y II Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática (II ENEM). (pp. 268-274). Tandil. Buenos Aires. Argentina. ISBN 978-950-658-284-

5. Consultado el 05 de junio de 2012 en:
<http://iciemiiemem.sites.exa.unicen.edu.ar/actas>
- Villarreal, M. E., Esteley, C. B., y Alagia, H. R. (2005). As produções matemáticas de estudantes universitários ao estender modelos lineares a contextos não-lineares. *BOLEMA - Boletim de Educação Matemática*. 18, (23), pp. 23-40.
- Vergnaud, G. (2009, 2010, 2011). Comunicación personal con María Rita Otero. Université Paris 8, 12/09-03/10 y 05/11.
- Vergnaud, G. (2008). Comunicación personal con María Rita Otero. *Functions, concepts and schemes*. A reply to Rita Otero. February 28.
- Vergnaud, G. (2007a). *Forma operatoria y forma predicativa del conocimiento*. Actas Primer Encuentro Nacional sobre Enseñanza de la Matemática. ISBN 978-950-658-183-1. Tandil. Buenos Aires, Argentina.
- Vergnaud, G (2007b): ¿En qué sentido la Teoría de los Campos Conceptuales puede ayudarnos para facilitar Aprendizaje Significativo? (In what sense the conceptual fields theory might help us to facilitate meaningful learning?). *Investigações em Ensino de Ciências*. 12 (2), pp.285-302.
- Vergnaud, G. (1996). Algunas ideas fundamentales de Piaget en torno a la didáctica. *Revista Perspectivas*, 26 (1).
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23).pp. 133-170.